

A técnica de elementos finitos como solução de problemas de contorno conhecido e problemas de contorno livre

Aparecida Celina Jarletti (Mestre)

Curso de Engenharia Elétrica - Universidade Tuiuti do Paraná

Resumo

Este trabalho apresenta uma nova metodologia para resolução de problemas de contorno livre ou desconhecido, que podem ser caracterizados pela aplicação do operador generalizado de segunda ordem e condições de contorno do tipo Dirichlet, Neumann ou Robim. A metodologia consiste na resolução do problema em um domínio ($\hat{\Omega}$) novo e pré fixado, através de mapeamento, e com condições de natural e adicional onde o contorno é desconhecido. A resolução do problema no novo domínio apresenta a grande vantagem de não necessitar uma nova malha para cada passo de um processo iterativo. A solução de um duplo sistema de equações diferenciais parciais leva ao conhecimento da solução e ao traçado do contorno nas regiões livres.

Palavras-chave: método de elementos finitos, problemas de contorno livre ou desconhecido

Abstract

This work presents a new methodology to resolution of free (or unknow) boundary problems, which can be characterized by application of a second order generalized linear operator on a unknow function in domain (Ω) and with boundary conditions type Dirichlet, Neumann or mixed (Robim). Methodology consists in the problem resolution in a new and pre-established domain (), through of map, and with natural and additional boundary conditions in the boundary regions where the same isn't defined. The problem resolution in a new domain present great advantage to avoid a new mesh to each step of iterative process. The solution of differential parcial equations double system leaves to knowledge of unknow and boundary trace in regions where it was unknow.

Key-words: finity elements method, free and unknowed bocoundary problems

Introdução

Em engenharia, é freqüente encontrar problemas matemáticos envolvendo sistemas de equações diferenciais parciais com soluções gerais envolvendo funções arbitrárias de relações entre as variáveis independentes, com dificuldade de atendimento das condições de contorno. Usualmente prefere-se determinar um conjunto de soluções particulares que atendam as condições impostas no contorno, e formar-se uma solução pela combinação linear das soluções particulares.

Em sistemas contínuos, que somente podem ser solucionados com exatidão através de manipulação matemática, um modelo adequado pode ser obtido usando subdivisão continuada indefinidamente.

Quando a solução analítica para sistemas de equações diferenciais parciais não é conhecida, busca-se uma solução aproximada através do emprego de métodos que possibilitem uma proximidade satisfatória. Esses sistemas utilizam um número

finito de componentes bem definidos e são os sistemas discretizados cujas técnicas de discretização podem apresentar-se mediante: a) aproximação através de diferenças finitas; b) variados procedimentos para a importância residual; c) técnicas para determinação aproximada do estacionário de funcionais bem definidos; e d) analogia direta entre elementos discretos reais e porções finitas de um domínio contínuo (técnica de elementos finitos) como um procedimento de discretização geral de problemas contínuos colocados mediante afirmações definidas matematicamente.

A existência de um tratamento unificado para problemas padrões discretos leva a definição de um processo de elementos finitos como um método de aproximação de problemas contínuos, de maneira que o contínuo é dividido em um número finito de partes (elementos), o comportamento dessas partes é especificado através de um número finito de parâmetros; e a solução do sistema completo como uma associação desses elementos, conduz aos mesmos resultados que aqueles aplicados a problemas discretos padrões.

Os problemas a serem resolvidos através de elementos finitos, são discretizados no domínio global através de uma malha e formulados via coordenadas globais para o domínio (Ω) em união com o contorno (Γ) onde o problema está definido. A solução

aproximada via elementos finitos é uma aproximação da solução exata do problema definido na região $\hat{\Omega}_{NE} \subset \mathfrak{R}^n$ ($n = 2$ ou 3) com contorno suave Γ_{NE} sendo desejável que $\hat{\Omega}_{NE}$ e Γ_{NE} representem tanto quanto possível a região e o contorno Γ respectivamente, mostrando a necessidade de um estudo particular a cada problema em questão. O operador matemático linear generalizado de segunda ordem é então considerado, aplicado a um domínio Ω e com contorno Γ .

O método de elementos finitos

Os principais constituintes do método de elementos finitos para a solução de um problema de contorno, de acordo com Hughes (1987), são:

- a) A forma fraca ou variacional do problema; e
- b) A solução aproximada das equações variacionais através do uso de funções de elementos finitos.

Para se definir a forma fraca ou equação variacional do problema, necessita-se a caracterização de duas classes de funções:

- a) Soluções Teste : Consistem em todas as funções cujas derivadas sejam quadrado-integráveis:

$$\int \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_i} \right)^2 dx < \infty \quad (1)$$

que satisfaçam a parte não - homogênea da condição de contorno.

$$S = \{\psi / \psi \in H^1(\Omega), \psi = q\} \text{ em } \Gamma_q \quad (2)$$

b) Variações Admissíveis : São também funções cujas derivadas sejam quadrado-integráveis, e que atendam a parte homogênea da condição de contorno:

$$V = \{\eta / \eta \in H^1(\Omega), \eta = 0\} \text{ em } \Gamma_q \quad (3)$$

O método de elementos finitos baseia-se na idéia fundamental de se aproximar S e V através de convenientes coleções de funções finito - dimensionais. As equações variacionais são então resolvidas em seu contexto finito - dimensional.

Método de Aproximação de (Bubonov-)Galerkin

Como primeiro passo, constituem-se aproximações de S e V . Essas coleções de funções são denotadas por S^h e V^h , cujo super escrito refere-se a malha ou discretização do domínio, o qual é parametrizado mediante um comprimento escalar

característico h . As coleções S^h e V^h , são subconjuntos de S e V respectivamente.

$$S^h \in S \Rightarrow \text{se } \psi^h \in S^h \text{ então } \psi^h \in S$$

$$V^h \in V \Rightarrow \text{se } \eta^h \in V^h \text{ então } \eta^h \in V$$

As coleções S^h , S , V^h , e V são espaços funcionais. Assumindo conhecida a coleção V^h , então para cada membro $\eta^h \in V$, constitui-se uma função $\psi^h \in S^h$ tal que:

$$\psi^h = \varphi^h + q^h \quad (4)$$

onde q^h é uma função dada, que satisfaz a condição de contorno essencial. A equação (04) constitui uma definição de S^h , isto é, S^h são todas as funções na forma da equação (04). O ponto chave a se observar é que a menos da função q^h , os espaços funcionais S^h e V^h são compostos de idênticas coleções de funções. O método de Galerkin leva a um sistema de equações algébricas lineares acopladas.

Seja V^h todas as combinações de funções dadas denotadas mediante $N_A : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$ onde $A = 1, 2, \dots, n$. (Ω é o domínio de elementos finitos). Se $\eta^h \in V^h$, então existem constantes C_A , $A = 1, 2, \dots, n$ de maneira que:

$$\eta^h = \sum_{A=1}^n C_A N_A = C_1 N_1 + C_2 N_2 + \dots + C_n N_n \quad (5)$$

Os N_A 's são conhecidos como funções de interpolação, funções básicas ou funções forma.

Para definir membros de \mathcal{S}^h é necessário especificar q^h . Com esta finalidade introduz-se outra função forma $N_{n+1} : \bar{\Omega} \rightarrow \mathfrak{R}$ com a seguinte propriedade de também satisfazer a condição de contorno essencial.

$$N_{n+1} \notin V^h$$

Então q^h é dado por:

$$q^h = q N_{n+1} \quad (6)$$

Com esta definição, uma típica $\eta^h \in V^h$ é escrita como: $\psi^h = \varphi^h + q^h$

$$\psi^h = \sum_{A=1}^n D_A N_A + q N_{n+1} \quad (7)$$

onde os D_A 's são constantes.

O sistema de n equações algébricas lineares acopladas, com n incógnitas, pode ser escrito como:

$$\sum_{B=1}^n K_{AB} D_B = F_A, \quad A = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

ou em notação matricial:

$$K = [K_{AB}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & K_{n2} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$F = [F_A] = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \dots \\ F_n \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$D = [D_B] = \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \dots \\ D_n \end{bmatrix} \quad (11)$$

A equação (08) torna-se:

$$K D = F \quad (12)$$

A terminologia frequentemente aplicada é:

K = matriz de rigidez

D = vetor força

F = vetor deslocamento

Pode-se então estabelecer a matriz equivalente (M), do problema de Galerkin. A solução de M é: $D = K^{-1} F$ (assumindo que a inversa de K^{-1} exista). Uma vez conhecida D, a solução de (G)

pode ser obtida para qualquer ponto $x \in \overline{\Omega}$, fazendo-se:

$$\psi^h(x) = \sum_{A=1}^n D_A N_A(x) + q N_{n+1}(x) \quad (13)$$

As funções derivadas de $\psi^h(x)$, se requeridas, podem ser obtidas mediante diferenciação termo-a-termo. Isto vem enfatizar que a solução (G) é uma solução aproximada. Consequentemente, a equação diferencial e a condição de contorno natural são somente satisfeitas aproximadamente. A qualidade da aproximação depende da escolha específica dos NA's e do número n.

A solução aproximada através de uma malha com incremento h é do tipo:

$$\psi^h(x) = \sum_{A=1}^n \psi_A^h N_A(x) \quad (14)$$

com $\psi_A^h \in \mathfrak{R}$, $A = 1, \dots, n$ (Número de nodos ou nós da malha)

Alguns parâmetros de interesse são necessários para se estabelecer uma configuração apropriada ao trabalho, a saber:

1) NE - Número de elementos (Ω_e) da malha (Ξ);

- 2) NP - Número de pontos, nós ou nodos (função do passo h e do tipo de elementos da malha);
- 3) LB - Grau de liberdade por nó (refere-se ao número de incógnitas a serem determinadas);
- 4) LBOUD (NP, LB) - Espécie da condição de contorno.

1- Se o nodo for de contorno e o valor da incógnita for prescrito no nodo (Condição de Contorno de primeira espécie ou tipo Dirichlet);

2- Se o nodo for de contorno e o valor prescrito nele for o da derivada normal da incógnita (fluxo) (Condição de Contorno de segunda espécie ou tipo Neumann);

3 - Se o nodo for de contorno e o valor prescrito no nó for uma combinação linear da incógnita e da derivada normal da própria incógnita (Condição de Contorno de terceira espécie ou mistas ou de Robin).

De forma geral, os espaços solução, são dados por:

$$H_{h,g}^{K,LB} = \{(\psi_1^h, \dots, \psi_J^h, \dots, \psi_{LB}^h) \in H_h^{K,LB}\} \quad (15)$$

tal que:

$\psi_J^I = g_J^I$ LBOUD(I,J) = 1; J = 1 a LB, I = 1 a NP sendo g_J^I o valor prescrito da incógnita ψ^h no nodo I do contorno para o grau de liberdade J.

Os espaços teste são, normalmente, dados por:

$$H_{h,0}^{K,LB} = \{(\psi_1^h, \dots, \psi_J^h, \dots, \psi_{LB}^h) \in H_h^{K,LB}\} \quad (16)$$

tal que:

$\psi_J^I = 0$; ; se LBOUD(I,J) = 1, J = 1 a LB e I = 1 a NP.

A solução aproximada via malha de elementos finitos é dada por

$$\psi^h(x) = \sum_{A=1}^{NP} \psi^h(I) N_I(x) \quad (17)$$

com $\psi^h(I) = g(I)$ se LBOUD (I,LB) = 1

Encontrar $\psi^h(x)$ é o mesmo que encontrar $\psi^h(I)$, I = 1 a NP

A vantagem do emprego da técnica consiste na possibilidade do conhecimento de uma solução aproximada para um problema de interesse. A desvantagem está em, para cada problema diferente, fazer-se necessária a definição e o emprego de uma malha de elementos finitos característica e apropriada ao problema.

Problemas de contorno conhecido

Os problemas de contorno são basicamente constituídos por :

- a) Equação diferencial principal : caracterizada pela existência de um operador (L) aplicado a uma função desconhecida (ψ) resultando determinado valor (f) no domínio (Ω) do problema.

$$L(\psi) = f \text{ em } \Omega \quad (18)$$

- b) Condições de contorno : equações auxiliares que possibilitam a resolução do problema, e são aplicadas a um contorno (Γ) conhecido e definido, tais como:

$$\psi = g \text{ em } \Gamma \quad (1a. \text{ espécie}) \text{ (Dirichlet)} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = q \text{ em } \Gamma \quad (2a. \text{ espécie}) \text{ (Neumann)} \quad (20)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} + \alpha \psi = r \text{ em } \Gamma \quad (3a. \text{ espécie}) \text{ (Mista ou Robin)} \quad (21)$$

Há, então, existência e unicidade de ψ e conhecimento e definição do contorno Γ .

Formulações forte e fraca para problemas de contorno

Os desenvolvimentos apresentados neste trabalho são relativos ao problema linear generalizado de segunda ordem, definido em sua forma forte por:

$$L = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \gamma$$

$$L(\psi) = f \text{ em } \Omega \quad (22)$$

Com condições de contorno:

$$\psi = g \text{ em } \Gamma_g \quad (23)$$

$$-\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cdot n_i = q \quad \text{em } \Gamma_q \quad (24)$$

$$-\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cdot n_i + \alpha \psi = r \quad \text{em } \Gamma_r \quad (25)$$

sendo n_i a componente de ordem i do vetor unitário n , normal a Γ .

Para que o problema forte dado pelas equações (22) a (25) tenha solução, devem ser impostas condições de regularidade às funções D_{ij} , v_i, γ, f, e, g , o que nem sempre é possível. Faz-se a construção do problema fraco análogo para garantir as condições de regularidade, que consiste em encontrar $\psi \in H^1(\Omega)$ tal que:

$$\begin{aligned} \forall \tilde{\psi} \in H^1(\Omega) \text{ com } \tilde{\psi} = g \Rightarrow (\psi - \tilde{\psi}) \in H_0^{1,\Gamma_1}(\Omega) \\ \forall \eta \in H_0^{1,\Gamma_1}(\Omega) \\ a(\psi, \eta) + c(\psi, \eta) = b(\eta) + b_l(\eta) + b_r(\eta) \end{aligned} \quad (26)$$

com:

$$\begin{aligned} a(\psi, \eta) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi \eta d\Omega \\ \forall \psi, \eta \in H^1(\Omega) \end{aligned} \quad (27)$$

$$c(\psi, \eta) = \int_{\Gamma_r} \alpha \psi \eta d\Gamma \quad \forall \psi, \eta \in L_2(\Gamma_r) \quad (28)$$

$$b(\eta) = \int_{\Omega} f \eta d\Omega \quad \forall \eta \in H^1(\Omega) \quad (29)$$

$$b_l(\eta) = \int_{\Gamma_r} r \eta d\Gamma \quad \forall \eta \in L_2(\Gamma_r, \Gamma_l) \quad (30)$$

A equação (27) é conhecida como equação variacional do problema fraco, o espaço $H_g^{1,\Gamma_1}(\Omega)$ como espaço solução e $H_0^{1,\Gamma_1}(\Omega)$ como espaço das funções testes admissíveis.

Problemas de contorno livre ou desconhecido

Problemas nos quais a solução de uma equação diferencial tem que satisfazer certas condições no contorno de um domínio prescrito são referendados como problemas de valor no contorno. Em muitos casos, o contorno do domínio não é conhecido, mas tem de ser determinado como parte da solução. O termo problema de contorno livre é comumente usado quando o contorno é estacionário.

Movimentos de contorno são associados com problemas dependentes do tempo e a posição do contorno deve ser determinada como uma função de tempo e espaço.

Em ambos os casos, problemas de contorno livre ou em movimento, são necessárias duas condições de contorno em cada tempo, uma para se determinar o contorno e a outra para completar a definição da solução da equação diferencial. Problemas com contorno em movimento são chamados de problemas de Stefan, como referência ao primeiro trabalho de Stefan (em torno de 1980), que estava interessado na fusão do gelo da calota polar.

Vários métodos numéricos para solução de problemas de contorno livre tem sido criados, e podem ser colocados em duas classes. Na primeira, ficam as técnicas aplicáveis ao problema como originalmente formulado no plano físico. Na segunda classe, o problema é tratado em uma forma diferente, ou seja, por introdução da variável Baiocchi ou alguma troca conveniente de coordenadas, e o problema transformado é resolvido numericamente. A escolha do método é influenciada por vários fatores, de maneira que sejam exploradas as técnicas mais poderosas para resolver a equação diferencial parcial e computar as facilidades disponíveis.

A preferência por elementos finitos é mais marcada para domínios de forma irregular e para problemas tridimensionais. É conveniente usar uma malha fixada na região de domínio global, na qual somente os nodos do contorno livre são ajustados no processo iterativo.

Tipicamente, um problema de contorno livre consiste de uma equação diferencial (de tipo elíptico) para ser satisfeita dentro de um domínio, juntamente com o contorno, com as necessárias condições de contorno. Uma seção do contorno, o contorno livre, é desconhecido e pode ser determinado como parte da solução. Para que isto seja possível, uma condição adicional deve ser especificada na região de contorno livre.

Fluxos através de meios porosos formam um importante grupo de problemas de contorno livre, como nos fenômenos de infiltração que ocorrem na natureza, ou seja, em infiltrações que ocorrem em represas de terra, canais, rios, lagos, sistemas de irrigação ou em poços e nascentes. O interesse prático de problemas de contorno livre, estende-se aos tópicos de física do plasma, semicondutores e mecanismos eletroquímicos.

Nas regiões de contorno livre, apresentam-se as dificuldades para a solução do problema, pois as coordenadas reais dos pontos ou nodos da malha não

são conhecidos. Para obter-se uma solução, recorre-se a um processo iterativo que pode admitir uma maior ou menor tolerância para o critério de convergência. Isto posto, os resultados serão sempre aproximados.

Como metodologia considera-se para as regiões do contorno livres ou desconhecidas, uma condição de contorno adicional, que dever ser satisfeita simultaneamente com a condição natural de contorno nessas regiões, de maneira que, possa-se garantir a convergência dos resultados e conseqüentemente a determinação das posições dos pontos de contorno. Um sistema de coordenadas locais com domínio ($\hat{\Omega}$) pré-estabelecido e onde o contorno está sempre definido é utilizado para a realização de mapeamentos. A vantagem consiste em: para qualquer perfil da região de contorno livre (Γ) do problema nas coordenadas globais, ter-se sempre um mesmo perfil (linear ou plano) na região de contorno ($\hat{\Gamma}$) correspondente nas coordenadas transformadas (ou locais).

Outra grande vantagem de se resolver o problema no novo sistema de coordenadas ($\hat{\Omega} \cup \hat{\Gamma}$) vem da fixação do perfil (linear ou plano) na região de contorno livre ou desconhecido do problema, acarretando uma diminuição no número de ordenadas a serem determinadas (parte da solução) (n-1) (1 para problemas bidimensionais e 2 para problemas

tridimensionais) para os nodos de contorno da região livre ou desconhecida. A resolução do problema nas coordenadas globais requer a determinação de n ordenadas (2 para problema bidimensional e 3 para problema tridimensional) para cada nodo de contorno da região livre.

Modela-se o problema de contorno livre como a composição de uma equação diferencial regedora no domínio, das condições de contorno verificadas em parcelas do contorno e a condição adicional em cada parcela de contorno livre. As combinações possíveis das condições de contorno são sempre duas das três espécies de condições de contorno possível.

$\psi = g$ em Γ_g primeira espécie (Dirichlet) (31)

$$-\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cdot n_i = q \quad \text{em } \Gamma_q \text{ segunda espécie}$$

(Neumann) (32)

$$-\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cdot n_i + \alpha \psi = r \quad \text{em } \Gamma_r \text{ terceira}$$

espécie (Robin) (33)

sendo n_i a componente de ordem i do vetor unitário n , normal a Γ .

Nos problemas de contorno conhecido, as coordenadas dos pontos pertencentes ao contorno são estipulados em função da geometria em estudo,

garantindo a convergência dos resultados, pela satisfação da condição de contorno natural. Nos problemas de contorno livre, a solução obtida, via processo iterativo é, sempre de valor aproximado, pois as posições dos pontos nodais no contorno fazem parte das incógnitas a serem determinadas.

Pela metodologia de imposição de uma condição adicional na região de contorno livre e a resolução em um domínio ($\hat{\Omega}$) de coordenadas locais, fica assegurada a convergência da solução e a determinação dos pontos do contorno, pela satisfação das condições de contorno natural e adicional.

Diversos pesquisadores têm empregado a técnica de elementos finitos para a obtenção de uma solução aproximada para as situações de interesse, tais como nos estudos de problemas convectivos de transporte de fluidos. Os resultados satisfatórios mostram a eficiência do método de elementos finitos, e a solução alcançada é sempre aproximada e a sua maior ou menor proximidade da solução exata depende da variância admitida entre iterações, através de um critério de convergência.

Salienta-se o fato de que para cada problema de contorno existe a necessidade de definição de uma malha característica, que represente tanto quanto possível o domínio e o contorno do problema em análise. Para os problemas de contorno livre, verifica-se a

dificuldade da definição de um novo contorno a cada passo de um processo iterativo, e conseqüentemente, uma nova malha de elementos finitos, tornando extremamente difícil a busca da solução do problema. Tal fato pode acarretar um tempo computacional elevado, o que não é interessante em qualquer análise.

O método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos têm sido empregados extensivamente para a solução numérica de problemas de contorno livre ou em movimento. Quando a solução é computada nos pontos de uma grade fixa no domínio espaço-tempo, seguindo os métodos usuais para obter uma solução numérica de uma equação simples, o contorno estará, em geral, entre dois pontos da grade em algum tempo dado. A dificuldade está compreendida em se determinar a posição do contorno em movimento em um novo tempo, sendo assim algum processo iterativo inevitável usualmente. Alternativamente, a grade pode ser deformada em algum caminho, ou alguma transformação de variáveis adotada, de maneira que o contorno em movimento esteja sempre em uma linha de grade ou seja fixado no domínio transformado. O método das grades modificadas tem o intuito de evitar acúmulo de complicação e perda da exatidão associada com intervalos espaciais desiguais perto do contorno em movimento.

Uma transformação de coordenadas n -dimensionais é uma escolha de novas coordenadas para adaptar a forma da região original, transformando o sistema original de coordenadas em um novo sistema podendo ser ortogonal ou não-ortogonal, de maneira que o contorno curvo torne-se linhas coordenadas. Em problemas com movimento de contorno, a região muda com o tempo, mas a malha fixada que corresponde a uma malha em movimento, pode ser usada em qualquer tempo. Os movimentos do contorno e dos pontos de malha na região original aparecem somente como mudança nas coordenadas originais. É uma vantagem para ter controle direto sobre o espaçamento da malha nas coordenadas originais, de maneira que, uma malha refinada pode ser usada em regiões de interesse especial de contorno em movimento ou em uma singularidade.

Para o caso dos problemas lineares generalizados de segunda ordem, na forma forte, dados pela equação diferencial:

$$L(\psi) = -\sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \gamma \psi = f \quad (34)$$

A solução do problema é obtida mediante multiplicação da equação diferencial por uma função $\eta \in H^1(\Omega)$ e integração no domínio tal como:

$$-\int_{\Omega} D: (\nabla_x \psi) (\nabla_x \eta) d\Omega + \int_{\Omega} (\eta v (\nabla_x \psi)) d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi \eta d\Omega = \int_{\Omega} f \eta d\Omega \quad (35)$$

Para fazer-se o mapeamento para $\hat{\Omega}$ deve-se considerar:

1) A regra da cadeia para a mudança de variáveis:

$$\nabla_x \psi = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_i} \quad (36)$$

2) A equação que define $J_{ij}^{-1} = \frac{\partial y_j}{\partial x_i}$, tornando:

$$\nabla_x \psi = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y_j} J_{ij}^{-1} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial y} J_i^{-1} = J^{-1} \nabla_y \psi \quad (37)$$

Similarmente

$$\nabla_x \eta = J^{-1} \nabla_y \eta \quad (38)$$

3) A relação

$$\int_{\Omega} f d\Omega = \int_{\hat{\Omega}} J f d\Omega \quad (39)$$

Em face de (36), (37) e (38) pode-se escrever para a equação (34)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\Omega &= - \int_{\hat{\Omega}} J D(\nabla_y \psi) J^{-1} (\nabla_y \eta) J^{-1} d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} J (v(\nabla_y \psi) \eta) J^{-1} d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} J \gamma \psi \eta d\Omega = \\ &= - \int_{\hat{\Omega}} J D (J^{-1})^T (\nabla_y \psi) (J^{-1})^T (\nabla_y \eta) d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} J (v (J^{-1})^T (\nabla_y \psi) \eta) d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} J \gamma \psi \eta d\Omega = \\ &= - \int_{\hat{\Omega}} J (J^{-1})^T D J^{-1} (\nabla_y \psi) (\nabla_y \eta) d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} J ((J^{-1})^T v (\nabla_y \psi) \eta) d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} J \gamma \psi \eta d\Omega \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f d\Omega &= - \int_{\hat{\Omega}} (J (J^{-1})^T J^{-1}) p (\nabla_y \psi) (\nabla_y \eta) d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} (J (J^{-1})^T) v (\nabla_y \psi) \eta d\Omega + \\ &+ \int_{\hat{\Omega}} J \gamma \psi \eta d\Omega \end{aligned} \quad (40)$$

Com o conhecimento dos valores de J , J^{-1} e $(J^{-1})^T$ é possível então a obtenção da solução buscada (para problema de contorno livre), através da resolução de um problema não-linear nos coeficientes (cujas solução é a mesma).

As técnicas apresentadas, são aplicáveis a regiões n-dimensionais simplesmente conexas, bem como a regiões n-dimensional multiplamente conexas (bidimensionais e tridimensionais em ambos os casos), tendo-se como equação diferencial do problema:

$$L(\psi) = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + \gamma \psi = f$$

$$n = (n_1, n_2, \dots, n_n)$$

$$\Gamma = \bigcup_{i=1}^{2n} \Gamma_i \quad \text{com} \quad \Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$$

$$L(\psi) = f \quad \text{em} \quad H^{-1}(\Omega) \quad (41)$$

Com condições de contorno

$$- \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \right) \cdot n_i + \alpha \psi = r_l \quad \text{em} \quad H^{-1/2}(\Gamma_l), \quad l = 1 \text{ a } 2n \quad (42)$$

$$\text{ou} \quad q_l + \alpha_l \psi = r_l \quad (43)$$

Sendo conhecidos:

$$\Gamma = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathfrak{R}^n\} \quad l = 1 \text{ a } 2n, \text{ exceção} = \Gamma_{free}$$

$$P_l = (x_1, \dots, x_n), \quad l = 1 \text{ a } 2n$$

Desconhecido:

$$\Gamma_{free} = \Gamma_1 \text{ ou } \Gamma_2 \text{ ou... ou } \Gamma_{2n}$$

A solução do problema em sua forma fraca, é executada mediante: multiplicação da equação diferencial do problema por uma função $\eta \in H^{-1}(\Omega)$, e integração no domínio(); emprego das propriedades das funções do $H^m(\Omega)$ ao resultado obtido; aplicação das condições de contorno, e reorganização dos resultados; e definição de formas bilineares e lineares, resultando:

$$a(\psi, \eta) + c(\psi, \eta) = b(\eta) + b_l(\eta) \quad (44)$$

com:

$$a(\psi, \eta) = \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \eta \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi \eta d\Omega \quad \forall \psi, \eta \in H^1(\Omega) \quad (45)$$

$$c(\psi, \eta) = \sum_{l=1}^{2n} \int_{\Gamma_l} \alpha \psi \eta d\Gamma \quad \forall \psi, \eta \in L_2(\Gamma_r) \quad (46)$$

$$b(\eta) = \int_{\Omega} f \eta d\Omega \quad \forall \eta \in H^1(\Omega) \quad (47)$$

$$b_l(\eta) = \sum_{l=1}^{2n} \int_{\Gamma_l} r \eta d\Gamma \quad \forall \eta \in L_2(\Gamma_l) \quad (48)$$

com a equação (44) sendo a equação variacional do problema fraco.

A equação (44) pode ser escrita como:

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n D_{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \eta}{\partial x_j} d\Omega + \int_{\Omega} \eta \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial \psi}{\partial x_i} d\Omega + \int_{\Omega} \gamma \psi \eta d\Omega + \sum_{l=1}^{2n} \int_{\Gamma_l} \alpha \psi \eta d\Gamma - \sum_{l=1}^{2n} \int_{\Gamma_l} q \eta d\Gamma = \int_{\Omega} f \eta d\Omega \quad (50)$$

onde β é uma espécie de operador Jacobiano no contorno.

Definindo-se:

$$\hat{q} = (\beta)q \quad (51)$$

$$\hat{\alpha} = (\beta)\alpha \quad (52)$$

pode-se escrever:

$$-\int_{\hat{\Gamma}_l} \alpha \beta \psi \eta d\Gamma + \int_{\hat{\Gamma}_l} \beta q \eta d\Gamma = -\int_{\hat{\Gamma}_l} \hat{\alpha} \psi \eta d\Gamma + \int_{\hat{\Gamma}_l} \hat{q} \eta d\Gamma \quad (53)$$

Definindo-se os seguintes funcionais:

bilineares:

$$a(\psi, \eta)_{\hat{\Omega}} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{D} : (\nabla_y \psi) (\nabla_y \eta) d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} (\eta \hat{v}(\nabla_y \psi)) d\Omega + \int_{\hat{\Omega}} \hat{\gamma} \psi \eta d\Omega \quad (54)$$

$$c(\psi, \eta)_{\Gamma_l} = \int_{\hat{\Gamma}_l} \hat{\alpha} \psi \eta \, d\Gamma \quad (55)$$

lineares:

$$b(\eta)_{\hat{\Omega}} = \int_{\hat{\Omega}} \hat{f} \eta \, d\Omega \quad (56)$$

$$d(\eta)_{\hat{\Gamma}_l} = \int_{\hat{\Gamma}_l} \hat{q} \eta \, d\Gamma \quad l = 1 \text{ a } 2n \quad (57)$$

Levando-se as equações (54), (55), (56) e (57) a equação (50), vem:

$$a(\psi, \eta)_{\hat{\Omega}} + c(\psi, \eta)_{\Gamma_l} = b(\eta)_{\hat{\Omega}} + d(\eta)_{\hat{\Gamma}_l} \quad (58)$$

Na parte de contorno desconhecido, é necessária uma condição adicional para que seja possível a resolução do problema.

Definindo-se os funcionais:

bilinear:

$$A(\psi, \eta)_{\hat{\Gamma}_{free}} = \int_{\hat{\Gamma}_{free}} \beta \psi \eta \, d\Gamma = \int_{\Gamma_{free}} \psi \eta \, d\Gamma \quad (59)$$

linear:

$$B(\eta)_{\hat{\Gamma}_{free}} = \int_{\hat{\Gamma}_{free}} \beta g_l \eta \, d\Gamma \quad (60)$$

faz-se:

$$A(\psi, \eta)_{\hat{\Gamma}_{free}} = B(\eta)_{\hat{\Gamma}_{free}} \quad (61)$$

A equação (61) relaciona a região de contorno livre no domínio (sistema de coordenadas globais) com a região de contorno pré-estabelecido no domínio $\hat{\Omega}$ (sistema de coordenadas locais), para a condição de contorno de primeira espécie (valor de incógnita fixado). O fator β que aparece na definição do funcional $A(\psi, \eta)_{\hat{\Gamma}_{free}}$ (equação (60)) é uma espécie de operador Jacobiano no contorno).

Busca-se encontrar $\psi \in H^1(\Omega)$ e solucionar o duplo sistema dado pelas equações (57) e (60) para $\forall \eta \in H^1(\hat{\Omega})$.

Conclusão e recomendações

Os resultados para mostrar a viabilidade do processo e a potencialidade do mesmo para obtenção das soluções buscadas são inerentes ao desenvolvimento de uma pesquisa específica (doutoramento da autora), onde estudos relativos a otimização da atribuição inicial do contorno livre e do raio de convergência

podem ser objetos de futuras pesquisas, através de algoritmos de correção para os dados iniciais do problema. A realização de tais estudos são uma recomendação para outros trabalhos de pesquisa, com aplicações específicas nas diferentes áreas do conheci-

mento científico e dos campos da engenharia que possam ser modelados pelo operador generalizado de segunda ordem aplicado a uma função (incógnita) no domínio, e cuja fronteira ou contorno seja todo ou em parte desconhecido ou livre.

Referências bibliográficas

DUTRA DO CARMO, E. G. e GALEÃO, A. C. (1986). *Uma formulação consistente de elementos finitos para resolver problemas convectivos-difusivos de transporte*. Revista Brasileira de Ciência, MEC, 4, 309-340.

_____. (1991). *Feedback Petrov-Galerkin methods for convection dominated problems*. Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., 88 1-16

HEINRICH, J. C., HUYAKORN, P. S., ZIENKIEWICZ, O. C. e MITCHELL, A. R. (1977). *An upwind finite element scheme for two-dimensional convective transport equation*. International Journal Numerics Methods Engrg., 11 134-143.

HUGHES, T. J. R. e MALLET, M. (1986). *A new finite element method for computational fluids dynamics: The generalized streamline operator for multidimensional advection diffusion systems*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 58 305-328.

HUGHES, T. J. R., FRANCA, L. P. e MALLET, M. (1986). *A new finite element method for computational fluid dynamics: I Symmetric forms of the compressible Euler and Navier-Stokes equations and the second law of thermodynamics*. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 54 223-234.

HUGHES, T. J. R. (1987). *The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis*. New Jersey: Prentice-Hall, Englewood Chiffs.

MAHMOUD, K. G. (1993). *Heat transfer with a moving boundary-application to transient solidification of a warm liquid on a moving cold plate*. Comput. Chem. Eng., 17-7, 705-715.

ZIENKIEWICZ, O. C. (1989). *The finite element method*. New Delhi: McGraw-Hill. Reimpresso na Índia.