
Representações dinâmicas na geometria analítica. Área e volume de poliedros irregulares conhecendo a posição de seus vértices.

Jorge Bernard (Doutor)

Curso de Licenciatura em Matemática – Universidade Tuiuti do Paraná

Daniele Cristina Thoaldo

Curso de Licenciatura em Matemática – Universidade Tuiuti do Paraná

Resumo

A Geometria é uma das áreas da Matemática que mais tem se beneficiado com o uso do computador. Para aprender é importante que o aluno descubra fazendo as operações necessárias para resolver os problemas propostos. Observa-se que houve um impacto no ensino da geometria com a apresentação das figuras em movimento, resultando num avanço dos alunos obtendo melhores notas e mostrando maior interesse. O principal objetivo é a construção de cenários originais incorporando instrumentos tecnológicos ao ensino da Matemática, o que servirá como forma de perturbação dos alunos e proporcionará um enfoque construtivista ao processo de ensino e aprendizagem. Observa-se, também, a inexistência de material didático para o estudo dos poliedros irregulares. O presente trabalho apresenta diversos cenários, utilizando o software de geometria dinâmica Cabri-Géomètre como ferramenta para o ensino e a aprendizagem da Matemática nos Cursos de Engenharia da Universidade Tuiuti do Paraná, que poderão ser utilizados para o ensino a distância. Observa-se, ainda, que este estudo vai ao encontro dos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino, o qual propõe enfaticamente a contextualização, a interdisciplinaridade e o uso de recursos tecnológicos. As situações aqui abordadas, quando representadas estaticamente, são de difícil visualização e interpretação. Qualquer atividade nesse ambiente computacional deve ser complementada com uma discussão na qual se buscam significados para as construções geométricas. Observou-se que a utilização de representações dinâmicas no ensino de engenharia permite: modelar fenômenos, estimular a aprendizagem contextualizada e interdisciplinar, auxiliar na validação de teoremas e sem dúvida atuar como agente de motivação e desenvolvimento do raciocínio lógico.

Palavras-chave: Tecnologia Educacional; Ensino de Matemática; Geometria.

Abstract

Geometry is one of the areas of Mathematics that has most benefited from the use of computers. In order to learn, the student must learn making the necessary operations to solve the proposed problems. Geometry teaching suffered a significant impact with the presentation of moving figures, improving the final results of the students who achieved better grades and showed more interest. The main goal is to build original scenarios incorporating technological instruments to teach Mathematics, disturbing the students and encouraging a constructivist approach for the learning and teaching process. There is no record of didactic material to study irregular polyhedrons. The present work presents several scenarios using a software of dynamic geometry, Cabri-Géomètre, as a tool to teach and learn Mathematics in the Engineering Courses at Universidade Tuiuti do Paraná, that may be also used for distance learning. Furthermore, this work complies with the National Curricular Parameters of Teaching, which emphatically proposes the contextualization, the interdisciplinary and the use of technological resources. The situations here approached, when statically represented, are difficult to visualize and interpret. Any activity within this computing environment shall be complemented with a discussion searching for meanings to geometric constructions. The use of dynamic representations to teach Engineering enables: modeling phenomena, stimulating the contextualized and interdisciplinary learning, assisting in the validation of theorems and; undoubtedly, motivating and helping to develop logic reasoning.

Key-words: Educational Technology; Mathematics Teaching; Geometry.

Introdução

Em estudos anteriores foi elaborada uma série de figuras resolvendo problemas métricos e de posição do espaço de forma gráfica e analítica, obtendo os resultados em tempo real. Como exemplos, cita-se a equação do plano individualizado por três pontos; interseção de planos; interseção de retas com planos; distância de ponto a plano e outros. Para concluir esta parte do estudo, ficou faltando preparar uma determinação de áreas e volumes de figuras irregulares do espaço. Nesta pesquisa, mostra-se a possibilidade da obtenção de áreas e volumes de poliedros irregulares em tempo real utilizando a “Macro Construção” do Cabri (Laborde, 1999), que permite a obtenção dos valores procurados apenas com os vértices da figura. Apresenta-se, também, um cálculo de áreas no espaço pela generalização do Teorema de Pitágoras.

2 Objetivos

Os objetivos dessa pesquisa são:

- a) Participar de forma fundamentada com uma contribuição ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática e de sua integração nas conexões entre o sistema escolar e social na área da Matemática (Carretero, 1997);
-

- b) Atualizar os conhecimentos nos processos de ensino e aprendizagem (Bernard, 2004);
- c) Conduzir o aluno a resolver problemas geométricos por um enfoque que lhe permita conjecturar, modelar, experimentar, exemplificar, generalizar e verificar (Mason, 1982);
- d) Utilizar a geometria intuitiva e a dedutiva que, juntas, devem contribuir para o aprimoramento do processo de aprendizagem em Matemática, não meramente pela ilustração geométrica, mas, sobretudo, pela validação da construção numa dada Teoria Geométrica (Mariotti, 1999);
- e) Possibilitar as soluções gráficas e analíticas simultâneas em tempo real (Bernard, 2001).
- f) Proporcionar um enfoque construtivista ao processo de ensino e aprendizagem (Bodem, 1999).

3 Metodologia

Os poliedros podem ser definidos como um conjunto de polígonos (faces) tais, que cada lado de uma face pertence sempre a duas faces. Aresta de um poliedro é o lado comum a dois polígonos das faces. Vértice de um poliedro é o ponto comum às arestas do poliedro. Os poliedros podem ser classificados em regulares, semi-regulares, multiformes e irregulares. Esta classificação baseia-se na lei de geração relativa à natureza dos ângulos sólidos e das faces. O poliedro

irregular é todo poliedro que não admite uma lei de geração que os caracterize e que não pode ser classificado em nenhum dos grupos anteriormente citados. O volume de um poliedro é a quantidade de espaço que ele ocupa. Conhecendo a posição dos vértices de qualquer poliedro, pode-se obter seu volume por cálculo vetorial. Para isto, divide-se o poliedro em tetraedros irregulares e efetuamos o somatório dos volumes parciais. O procedimento é o mesmo utilizado no cálculo de áreas de figuras planas onde se dividem os polígonos de n lados em $(n - 2)$ triângulos.

Pelo cálculo analítico, o volume de um tetraedro é dado na eq. (1) por uma sexta parte do módulo do produto misto dos vetores representados por três arestas concorrentes deste sólido, onde A, B, C, D são vértices do tetraedro $V = \frac{1}{6} |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}|$;

$$V = \frac{1}{6} |(B - A) \times (C - A) \cdot (D - A)| \quad (1)$$

Podem-se representar os vetores por triplas (2) e, neste caso, tem-se:

$$\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Extrapolando do plano para o espaço, o número de tetraedros T será igual ao número de vértices V do

poliedro mais o número de vetores diagonais internos D menos três, ou $T = V + D - 3$. As resoluções apresentadas, neste artigo, foram elaboradas utilizando o software Cabri-Géomètre. Para se efetuar o cálculo on-line, acrescentam-se um novo sistema de coordenadas para permitir uma representação em 3D. Arbitra-se um eixo x, bissetriz dos eixos y e z, com um coeficiente de redução de 0,5 conforme recomendam as Normas Técnicas. A obtenção das triplas é feita pela translação da origem do sistema de coordenadas segundo os vetores das arestas.

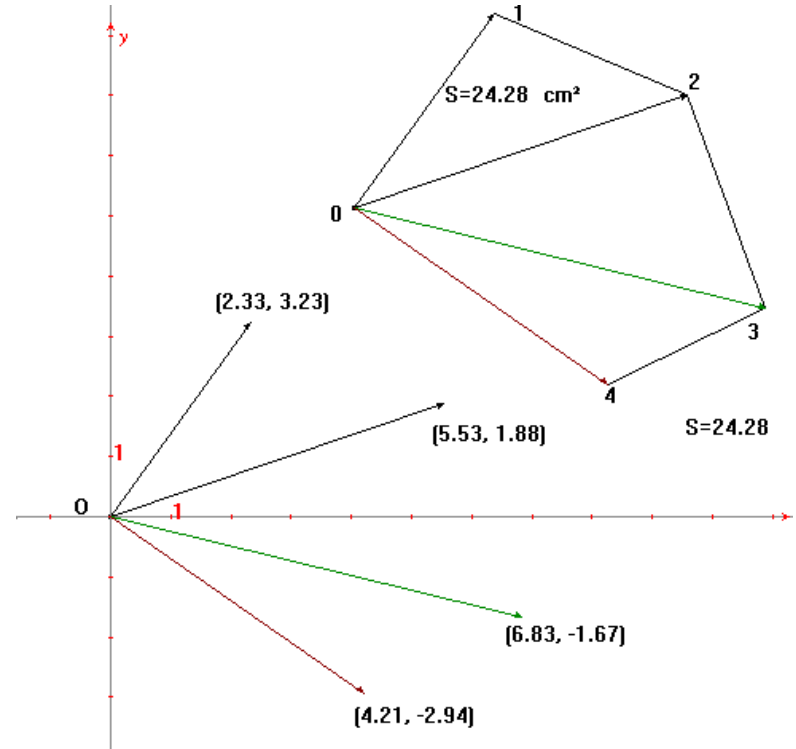
3.1 Área de Polígonos on-line utilizando o cálculo vetorial

Na caixa de ferramentas do Cabri-Géomètre II, obtém-se a área de polígonos e de algumas superfícies planas.

Para o cálculo da área de um triângulo no plano de referência, pode-se utilizar o volume de um paralelepípedo de altura unitária com base no triângulo transladado para a origem das coordenadas.

Tem-se: $\vec{u} = (X_1, Y_1, 0)$, $\vec{v} = (X_2, Y_2, 0)$ e $\vec{w} = (0,0,1)$ e a área do triângulo no plano de referência será igual ao módulo da metade do produto misto, como na eq. (3). Exemplo:

$$s = 1/2|\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}| = 1/2 \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & 0 \\ X_2 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1/2|(X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1)| \quad (3)$$



O procedimento a seguir, tem por objetivo a determinação da área do polígono por cálculo vetorial, o que poderá ser extrapolado para figuras do espaço:

1º) Construa-se um sistema de coordenadas ortogonais e crie-se, a seguir, um polígono qualquer de vértices 01234... Ao mover estes pontos, a área do polígono se altera. A figura 1 criada como exemplo é um pentágono;

Figura 1 – Área do polígono no plano por vetor em tempo real.

- 2º) Por um vértice 0 do polígono, construa-se vetores unindo aos seus outros vértices;
- 3º) Transporte-se por meio de uma translação os vetores para a origem das coordenadas. As coordenadas das extremidades dos vetores obtidos definem os mesmos: (X_1, Y_1) , (X_2, Y_2) , (X_3, Y_3) , (X_4, Y_4) ...
- 4º) Abra-se a ferramenta “calculadora” e obtenha-se a área S utilizando em módulo a eq. (4):

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} X_1 & X_2 & X_3 & X_4 & X_1 \\ Y_1 & Y_2 & Y_3 & Y_4 & Y_1 \end{vmatrix} \quad (4)$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} [| (X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1) | + | (X_2 \cdot Y_3 - X_3 \cdot Y_2) | + | (X_3 \cdot Y_4 - X_4 \cdot Y_3) |] \quad (4a)$$

Em um triângulo ABC no espaço, figura 2, pode-se calcular sua área por Pitágoras, eq. (5), por projeções de Monge (métodos geométricos de rebatimento e mudança de planos), em função dos lados, eq. (6), por vetores, eq. (7) ou outros métodos gráficos ou analíticos.

$$S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2 \quad (5)$$

$$S_{abc} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{onde } a + b + c = 2p \quad (6)$$

No Cabri, área de um triângulo no espaço pode ser calculada de forma simplificada pela interpretação geométrica do módulo do produto externo de dois vetores eq. (7).

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{u} \times \vec{v}| = 1/2 |\vec{u}| |\vec{v}| \sin \theta \quad (7)$$

Sendo $\vec{u} = (X_1, Y_1, Z_1)$, $\vec{v} = (X_2, Y_2, Z_2)$ vem que

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{(Y_1 \cdot Z_2 - Y_2 \cdot Z_1)^2 + (X_2 \cdot Z_1 - X_1 \cdot Z_2)^2 + (X_1 \cdot Y_2 - X_2 \cdot Y_1)^2} \quad (7a)$$

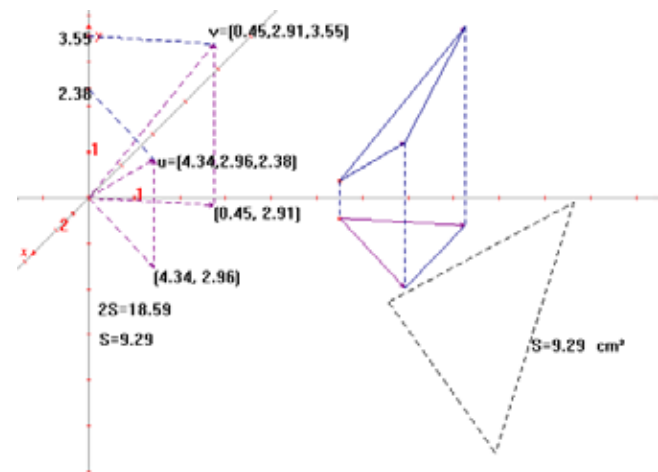


Figura 2 – Área do polígono no espaço por vetor em tempo real

3.2-Volume de Poliedros on-line utilizando o cálculo vetorial

Pode-se interpretar de forma geométrica que três vetores não coplanares, representam arestas de um

paralelepípedo. Sabe-se da geometria espacial, que o produto misto destes vetores representa o volume deste paralelepípedo. O volume de um tetraedro é uma sexta parte do volume de um paralelepípedo.

Quatro vértices não coplanares podem representar um tetraedro. Cada vértice a mais poderá representar mais um tetraedro. No caso de um prisma de base triangular, têm-se três tetraedros. O somatório dos volumes dos tetraedros dará o volume do poliedro. Um dos procedimentos para a obtenção do volume do poliedro é o seguinte:

- 1º) Construa-se um sistema de coordenadas ortogonais x_0-y_0 . Encontre-se a interseção da bissetriz de x_0-y_0 com a circunferência de centro na origem das coordenadas e raio unitário. Encontre-se o ponto médio entre este ponto e a origem. Com a ferramenta “novos eixos”, criem-se os novos eixos x_1-y_1 . Tem-se em perspectiva cavaleira modificada um triedro tri-retângulo ortogonal xyz onde $x=x_1$, $y=y_1$ e $z=y_0$. No espaço, a representação de figuras é definida no mínimo por duas projeções;
- 2º) Crie-se, a seguir, um poliedro qualquer, figura 3, de vértices (VABCD). Ao mover estes pontos, o volume do poliedro se altera. A figura 3 criada como exemplo é um poliedro com $V= 5$ (vértices), $F= 6$ (faces) e $A= 9$ (arestas), que confirma a fórmula de

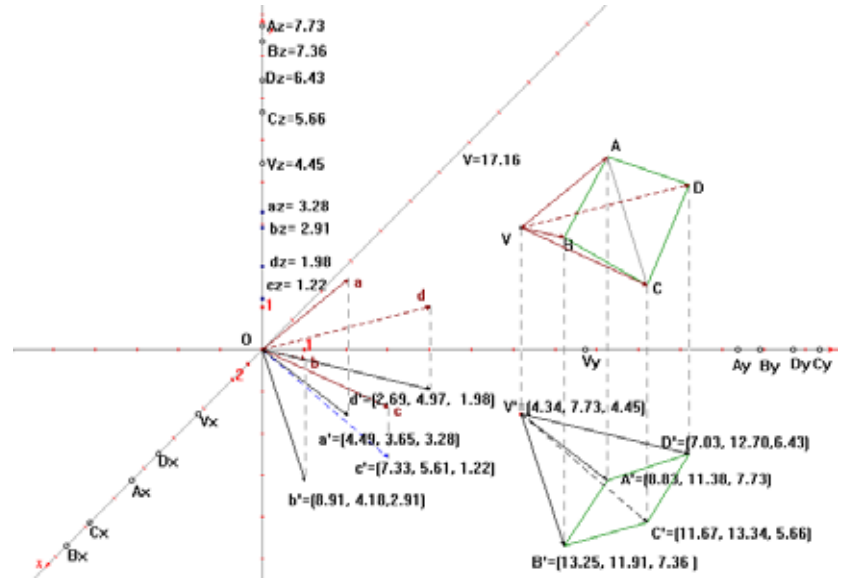


Figura 3 – Volume do poliedro irregular por vetor em tempo real

- Euler, dada por $V+F=A+2$ ou $5+6=9+2$. Pode-se observar que não se trata de uma pirâmide, pois os pontos ABCD são arbitrários e não coplanares;
- 3º) Como se tem cinco vértices, têm-se dois tetraedros. Escolhe-se um vértice V do poliedro e se une aos demais por vetores, obtendo os tetraedros (VABC) e (VCDA). Este procedimento deve ser feito nas duas projeções;
 - 4º) Transporte-se por meio de uma translação os vetores para a origem das coordenadas. As

coordenadas das extremidades dos vetores obtidos definem os mesmos:

$$\vec{u} = (X_1, Y_1, Z_1), \vec{v} = (X_2, Y_2, Z_2), \vec{w} = (X_3, Y_3, Z_3) \text{ e } \vec{t} = (X_4, Y_4, Z_4).$$

O volume total, eq. (8), será dado pela soma dos volumes dos tetraedros $V=V_1+V_2$.

$$V = \frac{1}{6} \{ |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}| + |\vec{w} \times \vec{t} \cdot \vec{u}| \} \quad (8)$$

$$V = \frac{1}{6} \left\{ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} X_3 & Y_3 & Z_3 \\ X_4 & Y_4 & Z_4 \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \end{vmatrix} \right\} \quad (8a)$$

3.3 Área de polígonos no espaço por rebatimento e pela generalização do teorema de Pitágoras

Pode-se obter a área de figuras planas do espaço por diversas maneiras como rotação, rebatimento deste plano sobre o quadro, mudança de plano ou aplicando na figura o teorema de Pitágoras para o espaço, eq. 5, cujo enunciado diz: “O quadrado da área de um triângulo (ou de uma figura plana qualquer) é igual à soma dos quadrados das áreas dos triângulos projetados ortogonalmente sobre um triedro tri-retângulo ortogonal”.

Neste estudo, é apresentado o cálculo das áreas de diversas superfícies comparando o rebatimento com Pitágoras e observando que se chega aos mesmos resultados.

No exemplo a seguir, é representado um triângulo apoiado nos planos de projeção e oblíquo em relação a estes planos. Inscrito no triângulo tem-se um círculo.

Os procedimentos para a construção deste cenário são os seguintes:

- 1º) Construir um sistema de coordenadas no espaço xyz como na figura 3 ou inverter sem nenhum impedimento x com y para utilizar a perspectiva cavaleira.
- 2º) Representar o plano XYZ com os vértices do triângulo nos respectivos eixos. Em seguida, rebate-se o triângulo XYZ sobre o plano YOZ utilizando YZ como eixo do rebatimento. Este rebatimento pode ser feito baseado em direções de transformação. No plano YOZ a figura estará em verdadeira grandeza e pode-se inscrever a circunferência (Ver Figura 4)
- 3º) Pela operação inversa, alçar os pontos para obter as projeções.
- 4º) Aplicando Pitágoras no triângulo tem-se:

$$S^2 = S'^2 + S''^2 + S'''^2 \quad (9)$$

$$S^2 = 6,862 + 6,542 + 10,232 = 194,44$$

Logo a área do triângulo será $S = 13,94$ unidades de área.

No círculo tem-se:

$$S^2 = 4,062 + 3,872 + 6,052 = 67,98$$

Logo a área do círculo será $S = 8,25$ unidades de área.



Figura 4 – Áreas de um triângulo e de um círculo no espaço por Pitágoras.

5º) Podem-se movimentar os pontos XYZ, e os valores das áreas se modificam em tempo real. No caso da figura estar distanciada do plano do quadro, o rebatimento do plano se torna mais difícil e, neste caso, fica mais simples calcular as áreas pelas projeções.

4 Resultados e Discussão

Nos exemplos apresentados anteriormente fica claro que o professor deve estimular o aluno na busca de soluções alternativas e mais criativas para os problemas, existindo a possibilidade de testar

conjecturas sobre as situações. Devemos salientar que a modelagem matemática e a resolução de problemas são de grande importância no processo de ensino-aprendizagem. A geometria gráfica na resolução de problemas espaciais permitiu uma visualização gráfica, analítica e dinâmica, destas diversas situações, mostrando-se como uma importante ferramenta para o processo de ensino e aprendizagem de ciências básicas.

No presente trabalho selecionamos alguns problemas métricos que dão enfoque especial aos métodos geométricos que os solucionam adotando uma abordagem que relaciona a geometria intuitiva e a dedutiva. Os problemas e situações aqui abordados quando representados estaticamente são de difícil visualização e contextualização. Os eixos do triedro tri-retângulo na representação tridimensional foram obtidos pela superposição de dois sistemas Cartesianos sendo um oblíquo e outro ortogonal, o que possibilitou as soluções gráficas e analíticas em tempo real.

Os experimentos realizados nas turmas de Geometria Analítica dos Cursos de Matemática e Engenharia Ambiental, num total de oitenta alunos, comprovaram um melhor desempenho e aproveitamento superior aos estudantes de anos anteriores. As figuras representadas impressas encontram-se, também, em disquete anexo.

Considerações Finais

Neste trabalho, constatou-se que a geometria dinâmica pode promover a ligação entre a álgebra e a geometria e contribuir significativamente para a aprendizagem em matemática. Os resultados obtidos on-line permitiram concluir que o enfoque

computacional proporcionado pela geometria dinâmica configura-se como uma alternativa didática para o processo de ensino-aprendizagem da matemática, e sem dúvida, atua como agente de motivação e desenvolvimento do raciocínio lógico-espacial. As figuras em movimento no Cabri ajudam na interpretação deste trabalho.

Referências

- BERNARD, J. O Ensino da Geometria utilizando representações dinâmicas. In: 10º *Erematsul*, 2004, Curitiba. 10º EREMATSUL. Curitiba: UFPR. V. 1.
- BERNARD, J. TAVARES, R. Representações geométricas espaciais utilizando geometria dinâmica, projeções centrais e ilustrações anaglíficas. In: *Gráfica* 2001. São Paulo. Anais do 15º Simpósio Nacional de Geometria Descritiva e Desenho Técnico e IV International Conference On Graphics Engineering For Arts And Design. São Paulo: ABEG-USP, 2001. V. 1. P.635-642.
- BERNARD, J. TAVARES, R. Anaglyphes dynamiques sur Le logiciel Cabri-Géomètre. In: *Cabri World II*, 2001. Montreal. Anais do Cabri World II. Montreal: U.Q.A.M./G.R.M'S.,2001.
- BODEM, M. A. *As idéias de Piaget*. São Paulo: Cultrix, 1999.
- CARRETERO, M. *Construtivismo e Educação*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.
- LABORDE, J. M. *Quinze ans de Cabri-Géomètre: um bilan*. Cabri-World'99, São Paulo: PUC-SP, 1999.
- MANUAL *Cabri Géomètre II*-Texas Instruments-1997.
- MARIOTTI, M. A. Introducing Pupils to Proof: *The Mediation of Cabri*. Cabri-World 99, São Paulo: PUC-SP.1999.
- MASON, J. *Thinking Mathematically*. New York: Addison-Wesley, 1982.